Varianta 92

Subiectul I

a) a=2. b) $\cos^2 2002\pi - \sin^2 2002\pi = \cos 2 \cdot 2002\pi = 1$. c) $AB = 4\sqrt{5} \Rightarrow R = 2\sqrt{5}$.
Centrul cercului este mijlocul lui AB, C(0,2). Ecuația cercului este $x^2 + (y-2)^2 = 20$.

d) $\frac{1}{b} = \frac{a}{3} = \frac{1}{1} \Rightarrow a = 3, b = 1$. e) $\left|(1+i)^8\right| = |1+i|^8 = \sqrt{2}^8 = 16$.

f) Cu formula lui Heron obținem $S = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6\sqrt{6}$.

Subiectul II

1.a) $\frac{11+12+...+18}{8} = \frac{8 \cdot (11+18)}{8 \cdot 2} = \frac{29}{2}$. b) 12 progresii aritmetice cu trei elemente.

c) $n \in \{1,2,3,4,5\}$, deci 5 numere naturale satisfac relația dată.

d) $f = (X^3 - 1)(X^3 + 1) = (X-1)(X^2 + X + 1)(X^3 + 1) \Rightarrow q = (X-1)(X^3 + 1)$;

e) $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

2. a) $f'(x) = e^x - e^{-x}$. b) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 2}{x} = f'(0) = 0$. c) $f''(x) = e^x + e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbf{R}$, deci f' este strict crescătoare, $f'(0) = 0$, deci $x_0=0$ este singurul punct de extrem local.

d) $\min f = f(0) = 2$. e) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{e^n} \int_0^n f(t)dt = \lim_{n \to \infty} \frac{e^n - e^{-n}}{e^n} = 1$.

Subiectul III

Fie $X(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $\det X(a,b) = a^2 + b^2 = 1$.

a) $I_2 = X(1,0) \in G, M(x) = X(\cos x, \sin x) \in G$.

b)Fie A=X(a,b), B=X(c,d)$\in G$. Avem

$A \cdot B = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -ad - bc & ac - bd \end{pmatrix}$, și cum $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 1$,

rezultă că $A \cdot B \in G$.

c) Calcul direct.

d) Din teorema Cayley-Hamilton obținem $A^2 - 2aA + I_2 = 0$, de unde rezultă $A^{-1} = 2aI_2 - A$.

e) Din $a^2 + b^2 = 1$ rezultă că există $x \in [0, 2\pi)$ astfel ca $a = \cos x, b = \sin x$.

f) $M^2(x) = \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}$. Se arată prin inducție că

$M^n(x) = \begin{pmatrix} \cos nx & \sin nx \\ -\sin nx & \cos nx \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

g) Fie $A=\begin{pmatrix}\cos 1 & \sin 1\\ -\sin 1 & \cos 1\end{pmatrix}$. Rezultă $G(A)=\left\{\begin{pmatrix}\cos n & \sin n\\ -\sin n & \cos n\end{pmatrix}\middle|, n\in N\right\}$. Arătăm că elementele lui G(A) sunt distincte. Dacă ar exista două matrice din G(A) a.î. $A^m = A^n$ cu $m,n\in \mathbf{N},\ m\neq n,$ rezultă $m=n+2k\pi, k\in \mathbf{Z}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow m-n=2k\pi$, contradicție cu faptul că π este irațional.

Subiectul IV

a) $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\frac{\pi}{4}; I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}tg^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[(tg^2x+1)-1]dx=(tgx-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$.

b) $I_{n+1}+I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(tg^{2n+2}x+tg^{2n}x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}tg^{2n}x(tg^2x+1)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}tg^{2n}x(tgx)'dx=\frac{tg^{2n+1}x}{2n+1}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2n+1}$.

c) $I_{n+1}-I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}tg^{2n+2}xdx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}tg^{2n}xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}tg^{2n}x(tg^2x-1)dx\leq 0$, deoarece $tg^{2n}x\geq 0$, $tg^2x-1\leq 0$ pentru $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$,deci $(I_n)_{n\geq 0}$ este descrescător. Evident $0<I_n\leq I_0, \forall n\in \mathbf{N}$, deci $(I_n)_{n\geq 0}$ este mărginit.

d) Din punctul e) rezultă că $(I_n)_{n\geq 0}$ este convergent, fiind monoton și mărginit. Fie $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=I, I\in \mathbf{R}$. Trecând la limită în relația de la b), obținem $I+I=0\Rightarrow I=0$.

e) Din relația de la b) obținem $I_n=\frac{1}{2n-1}-I_{n-1}, n\geq 1.$ Rezultă că

$$I_n=\frac{1}{2n-1}-I_{n-1}=\frac{1}{2n-1}-\left(\frac{1}{2n-3}-I_{n-2}\right)=...=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-3}+...+(-1)^n\cdot 1+(-1)^n\cdot I_0.$$

Rezultă $a_n=I_0+(-1)^{n-1}\cdot I_n, n\geq 1$.

f) Cum $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$, din punctul e) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=I_0=\frac{\pi}{4}$.

g) Din relația de la e) obținem $(-1)^n\left(\frac{\pi}{4}-a_n\right)=I_n$ și $(-1)^n n\left(\frac{\pi}{4}-a_n\right)=nI_n$. Pe de altă parte din punctul b) și monotonia lui (I_n) obținem

$2I_n\geq I_{n+1}+I_n=\frac{1}{2n+1}$ și $2I_{n+1}\leq I_{n+1}+I_n=\frac{1}{2n+1}$,deci $\frac{1}{2(2n+1)}\leq I_n\leq\frac{1}{2(2n-1)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2(2n+1)}\leq nI_n\leq\frac{n}{2(2n-1)}$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n=\frac{1}{4}$.